Ejercicios de Álgebra Básica. Curso 2018/19

Tema 4: Polinomios

El anillo $k[x]$. Divisibilidad

Ejercicio 1.– Sea A un anillo. Prueba que, si A es dominio de integridad, $A[x]^* = A^*$ y demuestra con un contraejemplo que, en general, esto no es cierto para cualquier anillo.

Ejercicio 2.– Demostrar que A es dominio de integridad si y sólo si $A[x]$ lo es.

Ejercicio 3.– Sea A un anillo. Probar que $A[x]/(x) \simeq A$.

Ejercicio 4.– Demostrar que no en todo anillo de polinomios los ideales son siempre principales, probando que

$$I = \{ \text{ polinomios con término independiente par } \} \subset \mathbb{Z}[x]$$

es un ideal que no puede ser generado con un único polinomio.

Ejercicio 5.– Demostrar que el ideal anterior es maximal en $\mathbb{Z}[x]$, probando que $\mathbb{Z}[x]/I \simeq \mathbb{F}_2$.

Ejercicio 6.– Hallar el cociente y el resto, en $\mathbb{Q}[x]$, al dividir los polinomios:

(1). $x^3 - 7x - 1$ entre $x - 2$. (2). $x^4 - 2x^2 - 1$ entre $x^2 + 3x - 1$.
(3). $x^4 + x^3 - 1$ entre $2x^2 + 1$. (4). $x^3 - 3x + 2$ entre $x^3 - 3x^2 - x + 3$.

Ejercicio 7.– Hallar el resto, en $\mathbb{Q}[x]$, al dividir

(1). $x^3 - 7x - 1$ entre $x - 2$. (2). $x^{14} - 2x^2 - 1$ entre $x - 1$. (3). $x^{40} + x^{30} - 1$ entre $x + 1$.

Ejercicio 8.– Calcular los valores de $a \in \mathbb{Q}$ para que $x^3 - ax^2 - 2x + a + 3$ sea divisible por $x - a$.

Ejercicio 9.– Sea $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ un polinomio que al dividirlo por $(x^2-3)(x+1)$, el resto es x^2+2x+5. ¿Cuál es el resto de dividir $f(x)$ entre $x^2 - 3$?

Máximo común divisor

Ejercicio 10.– Sean $f(x),\ g(x)$ polinomios con coeficientes en $\mathbb{Q}$. Calcular el máximo común divisor y la identidad de Bézout.

(1). $f(x) = x^2 - 3x + 2,\ g(x) = x^2 + x + 1$. (2). $f(x) = x^2 + x + 1,\ g(x) = x^2 - x + 1$.
(3). $f(x) = x^3 - 3x + 2,\ g(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$. (4). $f(x) = x^3 - 3x + 2,\ g(x) = x^4 - 5x^2 + 4$.

Ejercicio 11.– En cada caso se ide calcular el máximo común divisor y la identidad de Bézout

(1). $3x^3 + 4x^2 + 3$ y $3x^3 + 4x^2 + 3x + 4$ en $\mathbb{F}_5[x]$.

(2). $x^5 + 2x^3 + x^2 + x + 1$ y $x^4 + 2x^3 + x + 1$ en $\mathbb{F}_3[x]$.

(3). $x^6 + x^5 + x^3 + x$ y $x^8 + x^7 + x^6 + x^4 + x^3 + x + 1$ en $\mathbb{F}_2[x]$.

(4). $x^6 + x^5 + x^3 + x$ y $x^8 + x^7 + x^6 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ en $\mathbb{F}_2[x]$.

Ejercicio 12.– Escribir todos los polinomios de $\mathbb{F}_2[x]$ de grado menor o igual que tres. Decir cuáles de ellos son irreducibles.

Ejercicio 13.– Sea $I \subset k[x]$ un ideal y sean $f(x), g(x) \in I$, de tal forma que I es el menor ideal que contiene a ambos polinomios. Probar que $I = (\mathrm{mcd}(f(x), g(x)))$.

Factorización.

Ejercicio 14.– Sea $f(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x - 2 \in \mathbb{Q}[x]$. Calcular el máximo común divisor de $f(x)$ y $f'(x)$. ¿Tiene $f(x)$ factores múltiples?

Ejercicio 15.– Sea $I = (f(x)) \subset k[x]$ un ideal. Probar que son equivalentes las siguientes condiciones:

(a) $k[x]/I$ es cuerpo. $\quad$ (b) $f(x)$ es irreducible.

Ejercicio 16.– Usar el ejercicio anterior para construir cuerpos de 4, 9 y 25 elementos.

Ejercicio 17.– Detallar un procedimiento efectivo para, dado $f(x)$ hallar el polinomio $h(x)$ que tiene exactamente los mismos factores irreducibles que $f(x)$, pero sin factores múltiples.

Factorización en $\mathbb{C}[x]$ y en $\mathbb{R}[x]$.

Ejercicio 18.– Calcular las raíces en $\mathbb{C}$ de:

(1). $\Phi_3(x) = x^3 - 1$. $\quad$ (2). $\Phi_8(x) = x^8 - 1$. $\quad$ (3). $\Phi_{12}(x) = x^{12} - 1$.

Ejercicio 19.– Sabiendo que $f(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 14x + 26$ tiene a $3 + 2i$ como raíz, factorizar el polinomio $f(x)$ en factores irreducibles en $\mathbb{R}[x]$.

Ejercicio 20.– Demostrar las siguientes cuestiones:

(1). $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ se verifica que $z_1\overline{z}_2 + \overline{z}_1 z_2 \in \mathbb{R}$.

(2). Si $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{C}[x]$, y consideramos el polinomio

$$\overline{f}(x) = x^n + \overline{a}_{n-1}x^{n-1} + \cdots + \overline{a}_1 x + \overline{a}_0,$$

entonces $g(x) = f(x)\overline{f}(x) \in \mathbb{R}[x]$.

(3). Si α es una raíz de $g(x)$, entonces α o $\overline{\alpha}$ es raíz de $f(x)$.

Factorización en $\mathbb{Q}[x]$

Ejercicio 21.– Calcular las raíces racionales de:

(1). $x^3 - x^2 - 3x + 6$. $\quad$ (2). $6x^3 + x^2 - 5x - 2$. $\quad$ (3). $3x^3 + 7x^2 - 7x - 3$.

Ejercicio 22.– Sea $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ un polinomio mónico.

(1). Probar que todas las posibles raíces racionales son enteras.

(2). Probar que si $b \in \mathbb{Z}$ es una raíz de $f(x)$, entonces $n - b$ divide a $f(n)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

(3). Usar lo anterior para calcular las raíces racionales de $f(x) = x^4 + 5x^3 - 9x^2 - 14x + 24$.

Ejercicio 23.– Sea $f(x) = x^4 + 15x^3 + 72x^2 + 137x + 174$. Sabiendo que $f(-7) = -1$, calcular las raíces racionales de $f(x)$.

Ejercicio 24.– Si $f(x)$ y $g(X)$ son polinomios mónicos en $\mathbb{Z}[x]$, estudiar si es cierto que su máximo común divisor en $\mathbb{Q}[x]$ debe tener necesariamente coeficientes enteros.

Ejercicio 25.– Dado $n \geq 2$, sea $f(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$, y sea $\widetilde{f}(x) \in \mathbb{F}_p[x]$ el polinomio obtenido al reducir todos los coeficientes módulo p. Probar que, si se dan las dos condiciones siguientes:

- $\widetilde{f}(x) = \alpha x^n$, para un cierto $\alpha \in \mathbb{F}_p$.
- $f(p)$ no es divisible por p^2.

Entonces $f(x)$ es irreducible en $\mathbb{Q}[x]$.

Ejercicio 26.– Estudiar la irreducibilidad y la descomposición en irreducibles de los siguientes polinomios de $\mathbb{Q}[X]$:

(1). $x^5 + x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x + 4$. (2). $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x - 24$.
(3). $x^5 - 6x^4 + 14x^3 - 16x^2 - 16x + 48$. (4). $x^4 + 8x^3 + 22x^2 + 24x + 9$.

Factorización en $\mathbb{F}_p[x]$

Ejercicio 27.– Estudiar la irreducibilidad y la descomposición en irreducibles del polinomio $x^4 + 2x - 1$ en $\mathbb{F}_2[x]$, $\mathbb{F}_3[x]$ y $\mathbb{Q}[x]$.

Ejercicio 28.– Estudiar la irreducibilidad y la descomposición en irreducibles del polinomio $x^4 + 3x - 1$ en $\mathbb{F}_2[x]$, $\mathbb{F}_3[x]$, $\mathbb{F}_5[x]$ y $\mathbb{Q}[x]$.

Ejercicio 29.– Si p es un primo, probar que hay exactamente $(1/3)(p^3 - p)$ polinomios mónicos cúbicos e irreducibles en $\mathbb{F}_p[x]$.

Ejercicio 30.– Probar que hay exactamente 6 polinomios irreducibles de grado 5 en $\mathbb{F}_2[x]$.